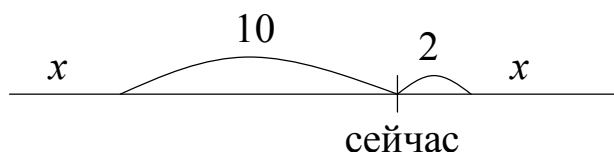


Департамент образования г. Москвы  
Московский институт открытого образования  
Примерные задания школьного тура математической  
олимпиады, октябрь 2011  
9 класс

1. Десять часов тому назад прошло столько же времени от начала суток, сколько останется до конца суток через 2 часа. Сколько времени сейчас?

*Ответ. Сейчас 16 часов.*

*Решение. Нарисуем схему и составим уравнение:  $x+10+2+x=24$ . Отсюда  $x=6$ .*



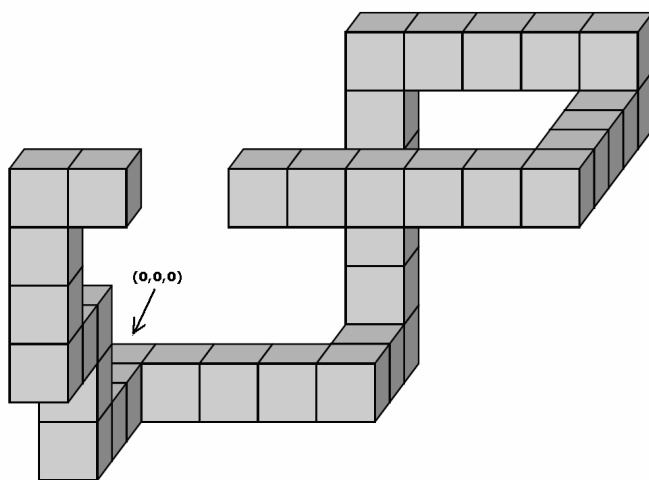
*Значит, от начала суток прошло  $x+10=16$  часов.*

2. При сложении двух целых чисел Коля поставил лишний ноль на конце одного из слагаемых и получил в сумме 777777 вместо 111111. Какие числа он складывал?

*Ответ. 37037 и 74074.*

*Решение. Из условия  $x+y=111111$ ,  $x+10y=777777$ . Откуда  $9y=666666$ ,  $y=74074$ . Тогда  $x=37037$ .*

3. На рисунке изображена «змейка» из одинаковых кубиков. Какое минимальное число кубиков потребуется, чтобы замкнуть ее?



*Ответ. 5 кубиков.*

*Решение. Пусть кубик, показанный стрелкой, имеет координаты  $(0;0;0)$ . Найдем координаты кубиков, которые требуется соединить. Левый из них будет иметь координаты  $(1;-5;5)$ , а правый  $(3;-2;4)$ . Поэтому, чтобы*

соединить их, потребуется  $|1-3| + |-5-(-2)| + |5-4| - 1 = 5$  кубиков. Например, это могут быть кубики  $(2;-5;5), (3;-5;5), (3;-4;5), (3;-3;5), (3;-2;5)$ .

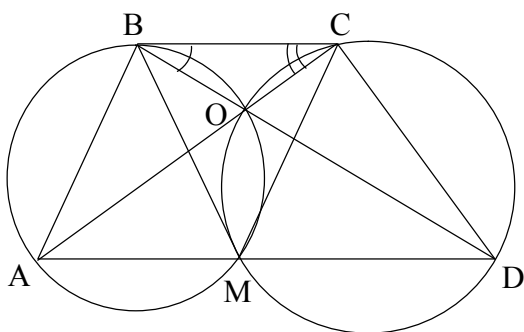
4. На острове живут только рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. За круглым столом собралось 1000 жителей острова. Каждый из них заявил: «Один из моих соседей – рыцарь, а другой – лжец». Сколько за этим столом рыцарей?

Ответ. 0.

Решение. Предположим, за столом есть хотя бы один рыцарь. Тогда с одной стороны от него сидит еще один рыцарь, а с двух сторон от этих рыцарей сидит по лжецу. Т.к. лжец не может говорить правду, то с оставшихся сторон от этих лжецов тоже должны сидеть рыцари. И т.д. Получается, что рыцари сидят парами, а пары рыцарей разделены лжецами. Но тогда общее число человек должно делиться на 3, а 1000 на 3 не делится. Значит, рыцарей за столом быть не может. Остался вариант, когда за столом сидят одни лжецы. Он удовлетворяет условию.

5. Диагонали трапеции  $ABCD$  пересекаются в точке  $O$ . Описанные окружности треугольников  $AOB$  и  $COD$  пересекаются в точке  $M$  на основании  $AD$ . Докажите, что треугольник  $BMC$  – равнобедренный.

Решение. Пусть  $\angle DBC=x$ ,  $\angle ACB=y$ . Тогда  $\angle CAM=y$ ,  $\angle BDM=x$ .  
 $\angle OBM=\angle OAM=y$  (как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу),  
аналогично  $\angle OCM=\angle ODM=x$ . Таким образом,  
 $\angle MBC=\angle OBM+\angle OBC=y+x$ ,  $\angle MCB=\angle OCM+\angle OCB=x+y$ . Т.е.  
 $\angle MBC=\angle MCB$ , что и требовалось доказать.



6. Можно ли расставить числа 1, 2, 3, 4, ..., 20 в вершинах и серединах ребер куба так, чтобы число, стоящее в середине каждого ребра, равнялось полусумме чисел, стоящих на концах этого ребра?

Ответ. Нет.

Решение. Пусть искомая расстановка существует. Тогда числа, стоящие в соседних вершинах куба, должны быть одной четности, так как число, равное их полусумме, – целое. Отсюда следует, что все числа, стоящие в вершинах, одной четности. Но числа 1 и 20 не могут быть полусуммами никаких двух чисел от 1 до 20, поэтому числа разной четности 1 и 20 должны стоять в вершинах – противоречие.

### ***Рекомендации по проверке.***

Каждая задача оценивается из 7 баллов. Каждая оценка – целое число от 0 до 7. Ниже приведены некоторые указания к проверке. Естественно, всех случаев жюри предвидеть не может. При оценке решения нужно исходить из того, является ли приведенное решение в целом верным (хотя, может, и с недостатками) – тогда решение оценивается не менее чем в 4 балла. Или оно неверное (хотя, может, и с существенными продвижениями) – в этом случае оценка должна быть не выше 3 баллов.

#### *Задача 1.*

*Только ответ «16 часов» без обоснования – 3 балла.*

#### *Задача 2.*

*Только правильный ответ без обоснования – 3 балла.*

#### *Задача 3.*

*Правильный ответ без обоснования – 3 балла.*

*В качестве обоснования достаточно найти «расстояние» между концами змейки по трем измерениям.*

*Если «расстояния» по трем измерениям найдены правильно, но дальше при нахождении количества необходимых кубиков ошибка в один кубик – 4 балла.*

#### *Задача 4.*

*Ответ «0 рыцарей» без обоснования – 1 балл.*

*В предположении, что рыцари есть, найдена закономерность расположения рыцарей и лжецов, при этом не замечено, что данное расположение невозможно (не заметили проблему на стыке), откуда неправильно найдено общее число рыцарей – 2 балла. Предыдущее, плюс найден случай 0 рыцарей – 3 балла.*

#### *Задача 5.*

*Рассмотрение частных случаев – 0 баллов.*

#### *Задача 6.*

*Ответ «нет» без обоснования (с неверным обоснованием) – 0 баллов.*