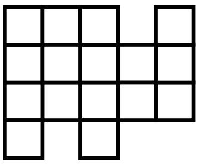
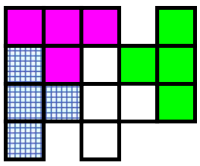
Департамент образования г. Москвы
Московский институт открытого образования
Примерные задания школьного тура математической олимпиады, октябрь 2011
5 класс

1. Сколько всего шестизначных чисел, сумма цифр которых равна 2? (Перечислите все такие числа.)
Ответ. 6 чисел: 200000, 100001, 100010, 100100, 101000, 110000.
Решение. Первая цифра может быть равна 1 или 2. Если 2, то все остальные цифры – нули. Если первая цифра 1, то среди оставшихся 5 цифр одна из цифр 1, а остальные нули. Так как 1 мы можем поставить в любой из пяти оставшихся разрядов, получаем еще 5 чисел.

2. Разрежьте фигуру, изображенную ниже, на четыре равные части:



Ответ. 

3. К празднику 50 первоклассникам раздали воздушные шарики – каждый получил 3 шарика: красный, жёлтый и зелёный. Могут ли первоклассники так поменяться друг с другом шариками, чтобы у каждого стало по три шарика одинакового цвета?

Ответ. Нет.
Решение. Если после обмена шариками у каждого окажется по три одноцветных шарика, то это значит, что количество шариков каждого цвета должно делиться на 3, но 50 на 3 не делится.

4. Винни-Пух, Пятачок и Кролик угощались калачами. Винни Пух и Пятачок в сумме съели 20 калачей. Винни Пух и Кролик в сумме съели 15 калачей, а Пятачок и Кролик – 9 калачей. Сколько калачей в сумме съели все трое? И сколько съел каждый из них?

Ответ. Все трое в сумме съели (20+15+9)/2=22 калача. Пух съел 13 калачей, Пятачок – 7 калачей, Кролик – 2 калача.

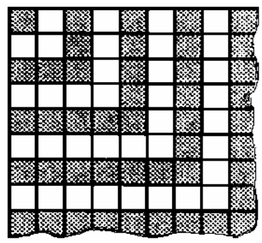
Решение. Калачи каждого упоминаются в двух парах, поэтому 20+15+9 – удвоенное количество съеденных калачей. Значит, в сумме съедено (20+15+9)/2=22 калача. Чтобы найти, сколько съел Пух, достаточно вычесть из общего числа калачей калачи, съеденные Пятачком и Кроликом.

Получим, что Пух съел 22-9=13 калачей. Аналогично Пятачок съел 22-15=7, Кролик 22-20=2 калача.

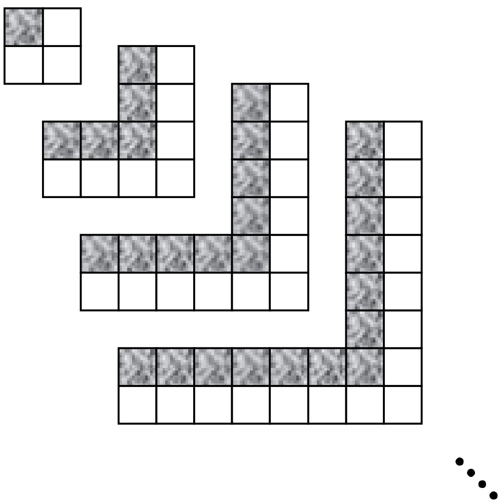
5. Мачеха дала Золушке два ведра, одно емкостью 7 литров, другое – 4 литра. И отправила ее на источник с требованием принести ровно 2 литра воды. Как Золушке выполнить это требование, сходив к источнику один раз?

Решение.
1) Наполняем 7-литровое, выливаем из него в 4-литровое 4 литра. В 7-литровом осталось 3 литра.
2) Опорожняем 4-литровое и выливаем в него 3 литра из 7-литрового.
3) Наполняем 7-литровое и доливаем 4-литровое доверху (т.к. в 4-литровом было 3 литра, то мы отольем 1 литр). В итоге в 7-литровом осталось 6 литров.
4) Опорожняем 4-литровое и наполняем его из 7-литрового. В итоге в 7-литровом от 6 литров останется ровно 2.

6. Дно квадратного бассейна выложено квадратными плитками двух цветов, как показано на рисунке. Всего использовано 900 плиток. На сколько больше понадобилось светлых плиток, чем темных?



Ответ. Белых на 30 плиток больше.
Решение. Так как всего использовано 900 плиток, то размер дна бассейна 30×30 плиток. Разобьем квадрат на «уголки» толщины 2 следующим образом:



*Всего получится 15 «уголков». В каждом из них белых плиток на 2 больше. Значит, всего белых плиток на 15*2=30 плиток больше.*

Рекомендации по проверке.

Каждая задача оценивается из 7 баллов. Каждая оценка – целое число от 0 до 7. Ниже приведены некоторые указания к проверке. Естественно, всех случаев жюри предвидеть не может. При оценке решения нужно исходить из того, является ли приведенное решение в целом верным (хотя, может, и с недостатками) – тогда решение оценивается не менее чем в 4 балла. Или оно неверное (хотя, может, и с существенными продвижениями) – в этом случае оценка должна быть не выше 3 баллов.

Задача 1. Правильно посчитаны и выписаны все числа – 7 баллов.
Выписаны все числа, но при подсчете количества забыто одно из чисел – 6 баллов.
Не найдено число 200000 (или какое-то другое одно число) – 3 балла.

Задача 2.
Верное разрезание – 7 баллов. Ничего обосновывать не нужно.

Задача 3. Только правильный ответ «нет» без обоснования – 0 баллов.
Обоснование типа «нет, т.к. 50 не делится на 3» (без объяснения, а почему должно делится) – 4 балла.

Задача 4.
Сказано, что всего съедено 44 калача – 0 баллов.
Правильно найдено только общее число съеденных калачей – 3 балла.
Только ответ «всего съедено 22 калача» без обоснований – 1 балл.
Только ответ «Все трое в съели 22 калача, Пух – 13, Пятачок – 7, Кролик – 2» без обоснований – 3 балла.

Задача 5. Правильный алгоритм – 7 баллов.
Найдено, как отмерить 1 литр, дальше продвижений нет – 3 балла.

Задача 6.
Верно найдены размеры бассейна (30×30) – 1 балл.
Только правильный ответ без обоснований 3 балла.

Департамент образования г. Москвы
Московский институт открытого образования
Примерные задания школьного тура математической
олимпиады, октябрь 2011
6 класс

1. Дима пишет подряд натуральные числа: 123456789101112... . На каких местах, считая от начала, в первый раз встретится три цифры 3 подряд?
Ответ. На 56, 57, 58 местах.
Решение. Три цифры 3 встретятся, когда встретятся числа 33 и 34. Посчитаем, какие это будут места:
$\underbrace{1\ 2\ 3\ \ldots\ 9}_{\text{9 однозначных чисел}}\ \ \underbrace{10\ 11\ 12\ \ldots\ 32}_{\text{13 двузначных чисел}}$ *Итого на числа от 1 до 32 будет израсходовано 9+2*23=55 мест. Значит, нужные цифры будут стоять на 56, 57, 58 местах.*

2. Имеются три бочонка: 12-литровый, наполненный квасом, и два пустых – 5-литровый и 8-литровый. Как, пользуясь этими бочонками, отмерить 9 литров кваса?

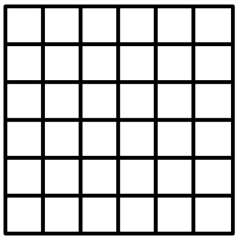
Ответ. Наполним 8-литровый бочонок и наполним из него 5-литровый. В итоге в 8-литровом останется 8-5=3 литра. Сольем весь оставшийся (кроме этих 3 литров) квас в 12-литровый бочонок – это и будет 12–3=9 литров.

3. К празднику 200 первоклассникам раздали воздушные шарики – каждый получил 3 шарика: красный, жёлтый и зелёный. Могут ли первоклассники так поменяться друг с другом шариками, чтобы у каждого стало по три шарика одинакового цвета?

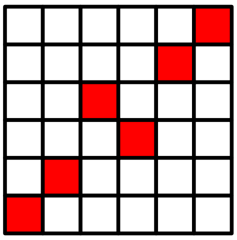
Ответ. Нет.
Решение. Если после обмена шариками у каждого окажется по три одноцветных шарика, то это значит, что количество шариков каждого цвета должно делиться на 3, но 200 на 3 не делится.

4. Мышь, мышонок и сыр вместе весят 180 г. Мышь весит на 100 г больше, чем мышонок и сыр вместе взятые. Сыр весит в три раза меньше, чем мышонок. Сколько весит каждый из них?
Ответ. Сыр 10 грамм, мышонок 30 грамм, мышь 140 грамм.
Решение. Так как мышь весит на 100 граммов больше, чем мышонок и сыр, то 180+100=280 грамм – это удвоенный вес мыши. Значит, мышь весит 140 грамм. Тогда мышонок и сыр в сумме весят 180-140=40 грамм. Так как сыр весит в три раза меньше мышонка, то мышонок и сыр – это учетверенный вес сыра. Значит, сыр весит 40:4=10 грамм. Ну и тогда мышонок весит 40 –10=30 грамм.

5. Закрасьте шесть клеток таблицы размером 6х6 в чёрный цвет так, чтобы из неё нельзя было вырезать по клеточкам ни белой полоски размером 1х6, ни белого квадрата размером 3х3.



Ответ. Например, так.



6. На острове, где живут только лжецы и рыцари, в строю стояло 10 человек. Каждый, кроме трёх самых левых, сказал: «Мой сосед слева – лжец». Самый левый сказал «Мой сосед справа – балда», а тот возмутился: «Я не балда!». Сколько лжецов в строю? (Как известно, лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду.) Найдите все возможные варианты и объясните, почему других нет.

Ответ. 5 рыцарей.
Решение. Рассмотрим двух самых левых. Они противоречат друг другу. Значит, один из них рыцарь, а другой – лжец. Рассмотрим первых 8 человек справа. Если первый из них рыцарь, то следующий лжец, тогда следующий рыцарь и т.д. – они будут чередоваться. Аналогично если первый лжец, то следующий рыцарь, и т.д. – они тоже будут чередоваться. Т.е. среди первых восьми половина в любом случае рыцари, а половина – лжецы.

Рекомендации по проверке.

Каждая задача оценивается из 7 баллов. Каждая оценка – целое число от 0 до 7. Ниже приведены некоторые указания к проверке. Естественно, всех случаев жюри предвидеть не может. При оценке решения нужно исходить из того, является ли приведенное решение в целом верным (хотя, может, и с недостатками) – тогда решение оценивается не менее чем в 4 балла. Или оно неверное (хотя, может, и с существенными продвижениями) – в этом случае оценка должна быть не выше 3 баллов.

Задача 1.
Верно сказано, что цифры встретятся, когда встретятся числа 33 и 34, но сами места не найдены или найдены совершенно неверно (например, не учитывается что числа бывают однозначные и двузначные) – 2 балла.
Логика подсчета номеров мест правильна, но допущена ошибка на единицу при подсчете количества однозначных или количества двузначных чисел, а дальше все правильно – 5 баллов.
Одна вычислительная ошибка – 5 баллов.

Задача 2.
Верный алгоритм – 7 баллов.

Задача 3. Только правильный ответ «нет» без обоснования – 0 баллов.
Обоснование типа «нет, т.к. 50 не делится на 3» (без объяснения, а почему должно делится) – 4 балла.

Задача 4.
Верно найдено только, сколько весит мышь – 3 балла.
Только ответ (верно указаны все три веса) без обоснования – 3 балла.

Задача 5. Верная раскраска – 7 баллов. Неверная – 0 баллов.

Задача 6.
Только ответ 5 рыцарей без обоснования 2 балла.
Ответ с примером (или что то же самое рассмотрен только один случай расположения рыцарей и лжецов) – 3 балла.
Доказано, что среди первых 8 человек половина рыцари, а больше продвижений нет (например дальше запутался и неверный ответ) – 3 балла.
Ребенок при решении полагает, что балда – это то же самое, что и лжец, при этом предположении решение правильно – 4 балла.

Департамент образования г. Москвы
Московский институт открытого образования
Примерные задания школьного тура математической олимпиады, октябрь 2011
7 класс

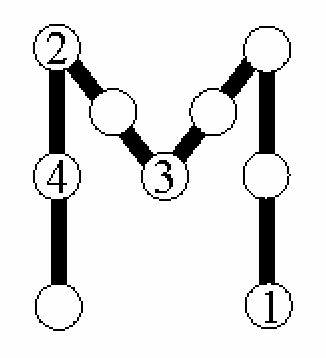
1. Найдите и запишите хотя бы одну дробь, которая больше, чем **9/10**, но меньше, чем **10/11**.

Ответ. Например, 199/220.
Комментарий. Так как 9/10–10/11=1/110, то в качестве ответа подойдет, например, число 9/10+(1/2)(1/110)=199/220.*

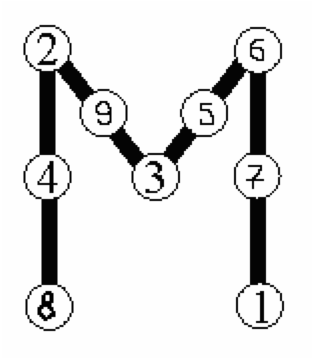
2. Деревянный куб со стороной 15 см распилили на кубики со стороной 3 см и поставили их один на другой. Какова высота полученного столба?

Ответ. 5×5×5×3=375 см.
Решение. Вдоль стороны большого куба помещается 15:3=5 маленьких кубиков. Значит, всего получится 5×5×5=125 маленьких кубиков. Поэтому высота полученной башни будет 125 кубиков, т.е. 125×3=375 см.

3. В кружки буквы М впишите все цифры от 5 до 9 (каждую по одному разу) так, чтобы все суммы из трёх цифр, стоящих по линиям буквы, были равными.



Ответ.



4. Имеются три бочонка: 12-литровый, наполненный квасом, и два пустых – 5-литровый и 8-литровый. Как, пользуясь этими бочонками, разделить квас на две равные части?

Первый бочонок (12л)	*Второй бочонок (8л)*	*Третий бочонок (5л)*	*Откуда куда будем переливать*
12	*0*	*0*	*Из 1 в 2*
4	*8*	*0*	*Из 2 в 3*
4	*3*	*5*	*Из 3 в 1*
9	*3*	*0*	*Из 2 в 3*
9	*0*	*3*	*Из 1 в 2*
1	*8*	*3*	*Из 2 в 3*

1	*6*	*5*	*Из 3 в 1*
6	*6*	*0*	

5. Дано трехзначное число **ABB**, произведение цифр которого — двузначное число **AC**, а произведение цифр числа **AC** равно **C** (здесь, как в математических ребусах, цифры в записи числа заменены буквами; одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные). Определите исходное число.

Ответ. 144.
*Решение. Так как A*C=C, то A=1 или C=0.*
Первый случай: A=1. Тогда $A*B*B=B^2=1C$*, но есть только один квадрат между 10 и 20 – это 16, т.е. C=6. Откуда B=4. Т.е. исходное число 144: A=1, B=4, C=6.*
*Второй случай: C=0. Тогда A*B*B=A0=10*A. Т.к. A – первая цифра, то* $A\neq 0$*, можем сократить на A. Получим* $B^2=10$ *– нет решения.*
Таким образом, ответ единственный.

6. Есть четыре коробки конфет. Первая коробка содержит столько же конфет, сколько 2/3 второй или 3/4 третьей или 10/11 четвертой. Какое наименьшее число конфет может быть в первой коробке?
Ответ. 30 конфет.
Решение. Выразим количество конфет во всех коробках через количество конфет в первой коробке.
Вторая коробка содержит 3/2 конфет первой коробки, третья коробка содержит 4/3 конфет первой коробки, четвертая коробка содержит 11/10 конфет первой коробки.
*Чтобы количества конфет во всех коробках были целые, количество конфет первой коробки должно делится на 2, 3, 10. Наименьшее общее кратное этих чисел – это 30. Т.е. количество конфет в первой коробке кратно 30. При этом оно может быть равно 30. Тогда во второй (3/2)*30=45, в третьей (4/3)*30=40, в четвертой (11/10)*30=33, и условие задачи выполняется.*

Рекомендации по проверке.

Каждая задача оценивается из 7 баллов. Каждая оценка – целое число от 0 до 7. Ниже приведены некоторые указания к проверке. Естественно, всех случаев жюри предвидеть не может. При оценке решения нужно исходить из того, является ли приведенное решение в целом верным (хотя, может, и с недостатками) – тогда решение оценивается не менее чем в 4 балла. Или оно неверное (хотя, может, и с существенными продвижениями) – в этом случае оценка должна быть не выше 3 баллов.

Задача 1.
Правильный ответ – 7 баллов. Обоснования можно не приводить.

Задача 2.
Правильно найдена высота столба – 7 баллов.
Правильно найдена высота столба в «кубиках» (забыли умножить на 3 – высоту одного кубика) – 4 балла.

Задача 3.
Правильно вписаны все цифры – 7 баллов. Обоснований не требуется.

Задача 4.
Верный алгоритм – 7 баллов.
Как разделить квас пополам не найдено, но найдено, как отмерить 1 литр – 2 балла.

Задача 5.
Правильный ответ – 1 балл.
Верно разобран случай A=1, случай C=0 потерян – 3 балла.
Случай A=1 разобран верно, в обосновании невозможности случая C=0 есть те или иные погрешности 4-6 баллов.

Задача 6.
Только ответ без обоснования – 2 балла.

Департамент образования г. Москвы
Московский институт открытого образования
Примерные задания школьного тура математической олимпиады, октябрь 2011
8 класс

1. Замените буквы **A**, **B**, **C** и **D** цифрами (не обязательно различными) так, чтобы получилось верное равенство: **AAAA** + **BBB** – **CC** + **D** = 2011.

Ответ. 1111+999-99+0

2. Два числа отличаются на 2, а их квадраты – на 100. Чему могут быть равны эти числа?
Ответ. 24 и 26 или -24 и -26.
Решение. Нам дано, что либо $x^2-(x+2)^2=100$, *либо* $(x+2)^2 - x^2=100$. *В первом случае получаем* $x=-26$, *а во втором* $x=24$.

3. Имеются три бочонка: 12-литровый, наполненный квасом, и два пустых – 5-литровый и 8-литровый. Как, пользуясь этими бочонками, разделить квас на две равные части?

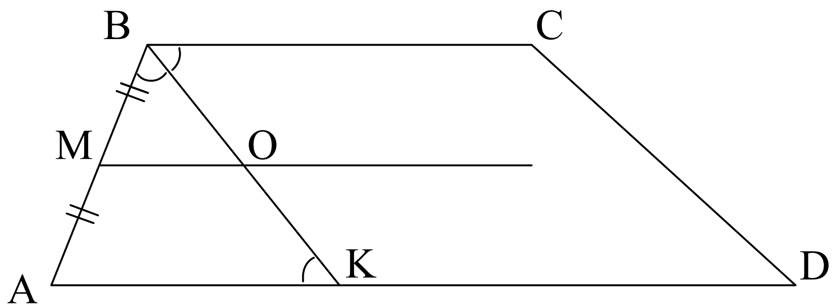
Первый бочонок (12л)	*Второй бочонок (8л)*	*Третий бочонок (5л)*	*Откуда куда будем переливать*
12	0	0	*Из 1 в 2*
4	8	0	*Из 2 в 3*
4	3	5	*Из 3 в 1*
9	3	0	*Из 2 в 3*
9	0	3	*Из 1 в 2*
1	8	3	*Из 2 в 3*
1	6	5	*Из 3 в 1*
6	6	0	

4. На острове живут только рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. За круглым столом собралось 7 жителей острова. Каждый из них заявил: «Один из моих соседей – рыцарь, а другой – лжец». Сколько за этим столом рыцарей?
Ответ. 0
Решение. Предположим, за столом есть хотя бы один рыцарь. Тогда с одной стороны от него сидит еще один рыцарь, а с двух сторон от этих рыцарей сидит по лжецу. Т.к. лжец не может говорить правду, то с оставшихся сторон от этих лжецов тоже должны сидеть рыцари. И т.д. Получается, что рыцари сидят парами, а пары рыцарей разделены лжецами. Но тогда общее число человек должно делиться на 3, а 7 на 3 не делится. Значит,

рыцарей за столом быть не может. Остался вариант, когда за столом сидят одни лжецы. Он удовлетворяет условию.

5. В четырёхугольнике ***ABCD*** стороны ***BC*** и ***DA*** параллельны. Через середину ***M*** стороны ***AB*** проведена прямая, параллельная ***BC*** и ***AD***. Биссектриса угла ***ABC*** пересекает эту прямую в точке ***O***. Докажите, что ***AO*** – биссектриса угла ***BAD***.

Решение. Пусть K – точка пересечения прямой BO с прямой AD. Тогда $\angle KBC = \angle BKA$ (как накрест лежащие), следовательно $\angle ABK = \angle AKB$, т.е. треугольник ABK – равнобедренный. MO – средняя линия в этом треугольнике (проходит через середину боковой стороны и параллельна основанию), т.е. O – середина BK. AO – медиана, а значит и биссектриса в равнобедренном треугольнике ABK. Получили, что AO – биссектриса $\angle BAD$, что и требовалось доказать.



6. Можно ли расставить числа 1, 2, 3, 4, …, 20 в вершинах и серединах рёбер куба так, чтобы число, стоящее в середине каждого ребра, равнялось сумме чисел, стоящих на концах этого ребра?

Ответ. Нет.

Решение. Сумма всех чисел равна учетверенной сумме чисел, стоящих в вершинах (действительно, каждое число, стоящее в вершине, дает вклад в три числа, стоящие в серединах трех ребер, выходящих из этой вершины). Таким образом, вся сумма должна делиться на 4. Но сумма чисел от 1 до 20 не делится на 4.

Рекомендации по проверке.

Каждая задача оценивается из 7 баллов. Каждая оценка – целое число от 0 до 7. Ниже приведены некоторые указания к проверке. Естественно, всех случаев жюри предвидеть не может. При оценке решения нужно исходить из того, является ли приведенное решение в целом верным (хотя, может, и с недостатками) – тогда решение оценивается не менее чем в 4 балла. Или оно неверное (хотя, может, и с существенными продвижениями) – в этом случае оценка должна быть не выше 3 баллов.

Задача 1.
Правильный ответ – 7 баллов. Обоснований не требуется.

Задача 2.
Только правильный ответ (оба варианта), без обоснований, почему других ответов нет – 3 балла.
Ответ «числа 24 и 26» - 2 балла
Числа 24 и 26 получены из уравнения, однако случай -24, -26 потерян – 3 балла.

Задача 3.
Верный алгоритм – 7 баллов.
Как разделить квас пополам не найдено, но найдено, как отмерить 1 литр – 2 балла.

Задача 4.
Ответ «0 рыцарей» без обоснования – 1 балл.
В предположении, что рыцари есть, найдена закономерность расположения рыцарей и лжецов, при этом не замечено, что данное расположение невозможно (не заметили проблему на стыке), откуда неправильно найдено общее число рыцарей – 2 балла. Предыдущее, плюс найден случай 0 рыцарей – 3 балла.

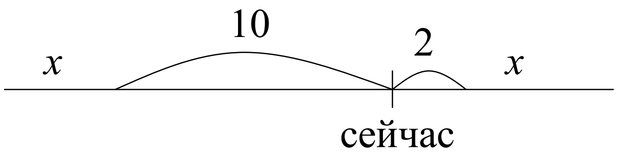
Задача 5.
Найдено, что AO – медиана, дальше продвижений нет – 2 балла.

Задача 6.
Ответ «нет» без обоснования (с неверным обоснованием) – 0 баллов.

Департамент образования г. Москвы
Московский институт открытого образования
Примерные задания школьного тура математической олимпиады, октябрь 2011
9 класс

1. Десять часов тому назад прошло столько же времени от начала суток, сколько останется до конца суток через 2 часа. Сколько времени сейчас?

Ответ. Сейчас 16 часов.
Решение. Нарисуем схему и составим уравнение: $x+10+2+x=24$. *Отсюда* $x=6$.

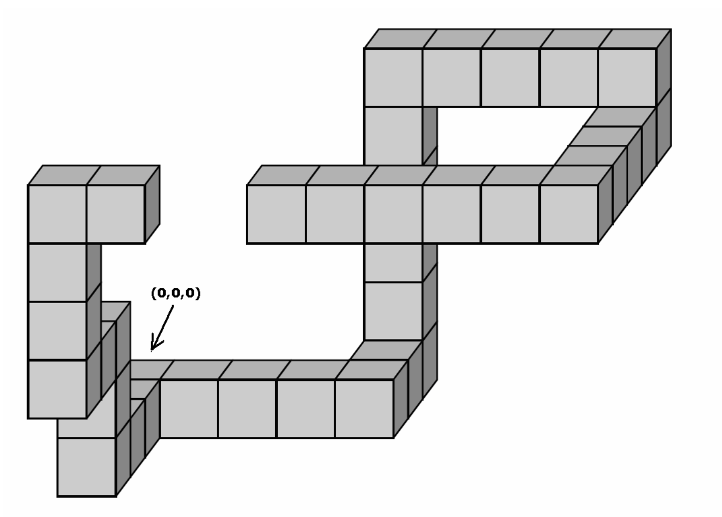


Значит, от начала суток прошло $x+10=16$ *часов.*

2. При сложении двух целых чисел Коля поставил лишний ноль на конце одного из слагаемых и получил в сумме 777777 вместо 111111. Какие числа он складывал?

Ответ. 37037 и 74074.
Решение. Из условия $x+y=111111$, $x+10y=777777$. *Откуда* $9y=666666$, $y=74074$. *Тогда* $x=37037$.

3. На рисунке изображена «змейка» из одинаковых кубиков. Какое минимальное число кубиков потребуется, чтобы замкнуть ее?



Ответ. 5 кубиков.
Решение. Пусть кубик, показанный стрелкой, имеет координаты (0;0;0). Найдем координаты кубиков, которые требуется соединить. Левый из них будет иметь координаты (1;-5;5), а правый (3;-2;4). Поэтому, чтобы

соединить их, потребуется |1-3| + |-5-(-2)| + |5-4| – 1 = 5 кубиков. Например, это могут быть кубики (2;-5;5),(3;-5;5),(3;-4;5),(3;-3;5),(3;-2;5).

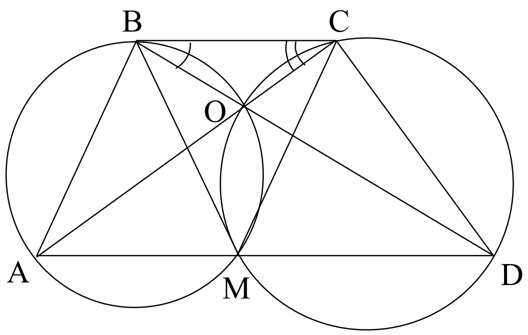
4. На острове живут только рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. За круглым столом собралось 1000 жителей острова. Каждый из них заявил: «Один из моих соседей – рыцарь, а другой – лжец». Сколько за этим столом рыцарей?

Ответ. 0.

Решение. Предположим, за столом есть хотя бы один рыцарь. Тогда с одной стороны от него сидит еще один рыцарь, а с двух сторон от этих рыцарей сидит по лжецу. Т.к. лжец не может говорить правду, то с оставшихся сторон от этих лжецов тоже должны сидеть рыцари. И т.д. Получается, что рыцари сидят парами, а пары рыцарей разделены лжецами. Но тогда общее число человек должно делиться на 3, а 1000 на 3 не делится. Значит, рыцарей за столом быть не может. Остался вариант, когда за столом сидят одни лжецы. Он удовлетворяет условию.

5. Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O. Описанные окружности треугольников AOB и COD пересекаются в точке M на основании AD. Докажите, что треугольник BMC – равнобедренный.

Решение. Пусть $\angle DBC=x$, $\angle ACB=y$. *Тогда* $\angle CAM=y$, $\angle BDM=x$. $\angle OBM=\angle OAM=y$ *(как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу), аналогично* $\angle OCM=\angle ODM=x$. *Таким образом,* $\angle MBC=\angle OBM+\angle OBC=y+x$, $\angle MCB=\angle OCM+\angle OCB=x+y$. *Т.е.* $\angle MBC=\angle MCB$, *что и требовалось доказать.*



6. Можно ли расставить числа 1, 2, 3, 4, …, 20 в вершинах и серединах рёбер куба так, чтобы число, стоящее в середине каждого ребра, равнялось полусумме чисел, стоящих на концах этого ребра?

Ответ. Нет.

Решение. Пусть искомая расстановка существует. Тогда числа, стоящие в соседних вершинах куба, должны быть одной четности, так как число, равное их полусумме, – целое. Отсюда следует, что все числа, стоящие в вершинах, одной четности. Но числа 1 и 20 не могут быть полусуммами никаких двух чисел от 1 до 20, поэтому числа разной четности 1 и 20 должны стоять в вершинах – противоречие.

Рекомендации по проверке.

Каждая задача оценивается из 7 баллов. Каждая оценка – целое число от 0 до 7. Ниже приведены некоторые указания к проверке. Естественно, всех случаев жюри предвидеть не может. При оценке решения нужно исходить из того, является ли приведенное решение в целом верным (хотя, может, и с недостатками) – тогда решение оценивается не менее чем в 4 балла. Или оно неверное (хотя, может, и с существенными продвижениями) – в этом случае оценка должна быть не выше 3 баллов.

Задача 1.
Только ответ «16 часов» без обоснования – 3 балла.

Задача 2.
Только правильный ответ без обоснования – 3 балла.

Задача 3.
Правильный ответ без обоснования – 3 балла.
В качестве обоснования достаточно найти «расстояние» между концами змейки по трем измерениям.
Если «расстояния» по трем измерениям найдены правильно, но дальше при нахождении количества необходимых кубиков ошибка в один кубик – 4 балла.

Задача 4.
Ответ «0 рыцарей» без обоснования – 1 балл.
В предположении, что рыцари есть, найдена закономерность расположения рыцарей и лжецов, при этом не замечено, что данное расположение невозможно (не заметили проблему на стыке), откуда неправильно найдено общее число рыцарей – 2 балла. Предыдущее, плюс найден случай 0 рыцарей – 3 балла.

Задача 5.
Рассмотрение частных случаев – 0 баллов.

Задача 6.
Ответ «нет» без обоснования (с неверным обоснованием) – 0 баллов.

Департамент образования г. Москвы
Московский институт открытого образования
Примерные задания школьного тура математической олимпиады, октябрь 2011
10 класс

1. Два различных числа x и y (не обязательно целых) таковы, что

$$x^2–2012x=y^2–2012y.$$

Найдите сумму чисел x и y.

Ответ. 2012

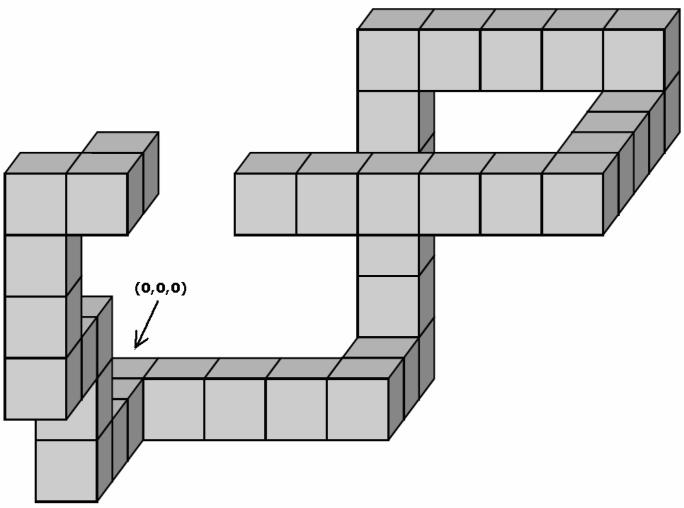
Решение. Преобразуем исходное уравнение: $x^2–y^2=2012(x–y)$. *Так как числа x и y различны, можем сократить на (x-y), получим: x+y=2012.*

2. Напишите уравнение какой-нибудь параболы, график которой пересекает оси координат в вершинах прямоугольного треугольника.

Ответ. Например, $y=x^2-1$.

Данная парабола пересекает ось абсцисс в точках A(-1;0) и B(1;0), ось ординат – в точке C(0;-1). Треугольники AOC и BOC – прямоугольные равнобедренные (O – начало координат), т.е. углы OCA и OCB равны 45^o, *следовательно угол ACB – прямой.*

3. На рисунке изображена «змейка» из одинаковых кубиков. Какое минимальное число кубиков потребуется, чтобы замкнуть ее?



Ответ. 4 кубика.

Решение. Пусть кубик, показанный стрелкой, имеет координаты (0;0;0). Найдем координаты кубиков, которые требуется соединить. Левый из них *будет иметь координаты (1;-4;5), а правый (3;-2;4). Поэтому, чтобы соединить их, потребуется |1-3| + |-4-(-2)| + |5-4| – 1 = 4 кубика. Например, это могут быть кубики (2;-4;5),(3;-4;5),(3;-3;5),(3;-2;5).*

4. На острове живут только рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. За круглым столом собралось 2012 жителей острова. Каждый из них заявил: «Один из моих соседей – рыцарь, а другой – лжец». Сколько за этим столом рыцарей?

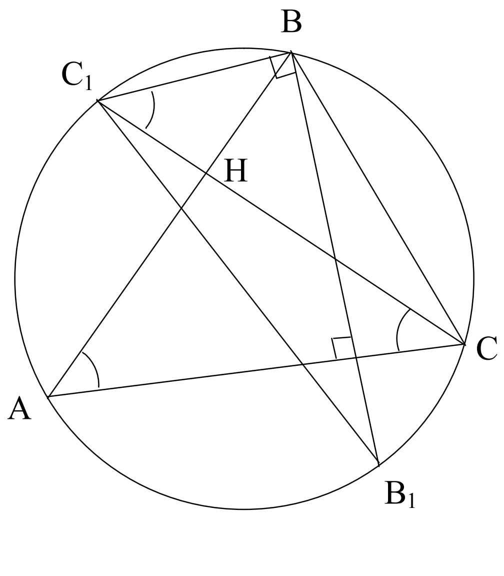
Ответ. 0 рыцарей.

Решение. Предположим, за столом есть хотя бы один рыцарь. Тогда с одной стороны от него сидит еще один рыцарь, а с двух сторон от этих рыцарей сидит по лжецу. Т.к. лжец не может говорить правду, то с оставшихся сторон от этих лжецов тоже должны сидеть рыцари. И т.д. Получается, что рыцари сидят парами, а пары рыцарей разделены лжецами. Но тогда общее число человек должно делиться на 3, а 2012 на 3 не делится. Значит, рыцарей за столом быть не может. Остался вариант, когда за столом сидят одни лжецы. Он удовлетворяет условию.

5. Высоты остроугольного треугольника ABC, проведенные из вершин B и C, продолжили до пересечения с описанной окружностью в точках B_1 и C_1. Оказалось, что отрезок B_1C_1 проходит через центр описанной окружности. Найдите угол BAC.

Ответ. 45^o

Решение.



Так как C_1B_1 *– диаметр, то* $\angle C_1BB_1=90^o$. *Так как* $BB_1 \perp AC$, *то* $C_1B||AC$. *Поэтому* $\angle BC_1C=\angle C_1CA$. *Углы* BC_1C *и* BAC *равны, как вписанные, опирающиеся на одну дугу. Следовательно,* $\angle C_1CA=\angle BAC$. *Пусть* H *– основание высоты, опущенной из вершины* C. *Прямоугольный треугольник* AHC *– равнобедренный, т.е.* $\angle A=45^o$

6. Можно ли расставить числа 1, 2, 3, 4, …, 20 в вершинах и серединах рёбер куба так, чтобы число, стоящее в середине каждого ребра, равнялось полусумме чисел, стоящих на концах этого ребра?

Ответ. Нет.

Решение. Пусть искомая расстановка существует. Тогда числа, стоящие в соседних вершинах куба, должны быть одной четности, так как число, равное их полусумме, – целое. Отсюда следует, что все числа, стоящие в вершинах, одной четности. Но числа 1 и 20 не могут быть полусуммами никаких двух чисел от 1 до 20, поэтому числа разной четности 1 и 20 должны стоять в вершинах – противоречие.

Рекомендации по проверке.

Каждая задача оценивается из 7 баллов. Каждая оценка – целое число от 0 до 7. Ниже приведены некоторые указания к проверке. Естественно, всех случаев жюри предвидеть не может. При оценке решения нужно исходить из того, является ли приведенное решение в целом верным (хотя, может, и с недостатками) – тогда решение оценивается не менее чем в 4 балла. Или оно неверное (хотя, может, и с существенными продвижениями) – в этом случае оценка должна быть не выше 3 баллов.

Задача 1.
Только ответ без обоснования – 1 балл.

Задача 2.
Верное уравнение, но не объяснено, почему график пересекает оси в вершинах прямоугольного треугольника – 5 баллов.

Задача 3.
Правильный ответ без обоснования – 3 балла.
В качестве обоснования достаточно найти «расстояние» между концами змейки по трем измерениям.
Если «расстояния» по трем измерениям найдены правильно, но дальше при нахождении количества необходимых кубиков ошибка в один кубик – 4 балла.

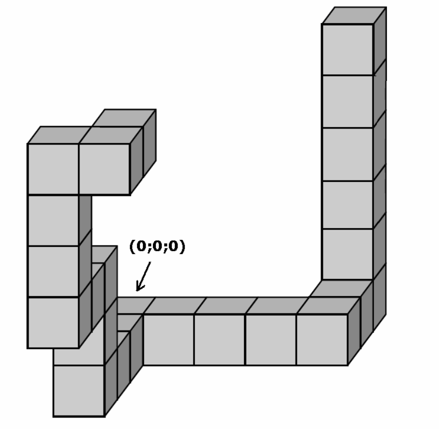
Задача 4.
Ответ «0 рыцарей» без обоснования – 1 балл.
В предположении, что рыцари есть, найдена закономерность расположения рыцарей и лжецов, при этом не замечено, что данное расположение невозможно (не заметили проблему на стыке), откуда неправильно найдено общее число рыцарей – 2 балла. Предыдущее плюс найден случай 0 рыцарей – 3 балла.

Задача 5.
Только ответ без обоснования – 1 балл. Рассмотрение частных случаев обоснованием не является.

Задача 6.
Ответ «нет» без обоснования (с неверным обоснованием) – 0 баллов.

Департамент образования г. Москвы
Московский институт открытого образования
Примерные задания школьного тура математической олимпиады, октябрь 2011
11 класс

1. На рисунке изображена «змейка» из одинаковых кубиков. Какое минимальное число кубиков потребуется, чтобы замкнуть ее?



Ответ. 8 кубиков.
Введем систему координат. Пусть кубик, показанный стрелкой, имеет координаты (0;0;0). Найдем координаты кубиков, которые требуется соединить. Левый из них будет иметь координаты (1;-4;5), а правый (4; 2;5). Поэтому, чтобы соединить их, потребуется $|1-4| + |-4-2| + |5-5| - 1 = 8$ *кубиков. Например, нарастим левый конец змейки в глубину на 3 кубика, а потом на 5 кубиков вправо.*

2. Один градус шкалы Цельсия равен 1,8 градусов шкалы Фаренгейта, при этом 0^o по Цельсию соответствует 32^o по шкале Фаренгейта. Может ли температура выражаться одинаковым числом градусов как по Цельсию, так и по Фаренгейту?
Ответ. Да.
Из условия следует, что температура по Фаренгейту выражается через температуру по Цельсию следующим образом: $T_F = 1{,}8T_C + 32^o$. *Если* $T_F = T_C = x$, *то* $x = 1{,}8x + 32$, *то есть,* $x = -40$.
Заметим, что корень уравнения можно было и не находить. Достаточно указать, что графики линейных функций с неравными угловыми коэффициентами пересекаются.

3. Корни квадратного уравнения $5x^2-3x+c=0$ – числа $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ (где α – некоторый угол); других корней у уравнения нет. Чему равно c?

Ответ. $c = -1{,}6$.

Решение. По теореме Виета $\sin\alpha + \cos\alpha = 3/5$, $\sin\alpha\cos\alpha = c/5$. *Так как* $\sin\alpha + \cos\alpha = 3/5$, *то* $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 9/25$. *Откуда* $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha = 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha = 9/25$; $\sin\alpha\cos\alpha = -8/25$, *т.е.* $c = -8/5 = -1{,}6$

4. На острове живут только рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. За круглым столом собралось 2012 жителей острова. Каждый из них заявил: «Один из моих соседей – рыцарь, а другой – лжец». Можно ли определить сколько за этим столом рыцарей?

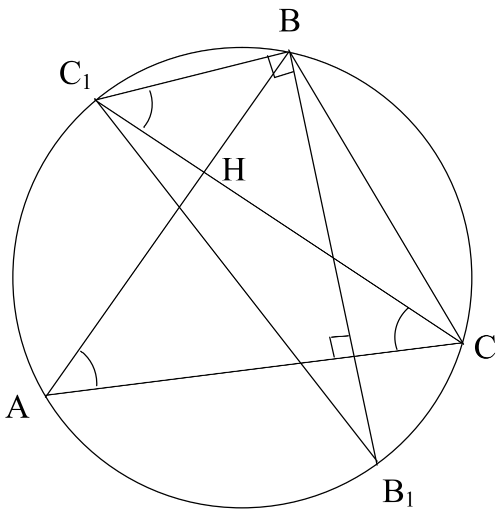
Ответ. 0 рыцарей.

Решение. Предположим, за столом есть хотя бы один рыцарь. Тогда с одной стороны от него сидит еще один рыцарь, а с двух сторон от этих рыцарей сидит по лжецу. Т.к. лжец не может говорить правду, то с оставшихся сторон от этих лжецов тоже должны сидеть рыцари. И т.д. Получается, что рыцари сидят парами, а пары рыцарей разделены лжецами. Но тогда общее число человек должно делиться на 3, а 2012 на 3 не делится. Значит, рыцарей за столом быть не может. Остался вариант, когда за столом сидят одни лжецы. Он удовлетворяет условию.

5. Высоты остроугольного треугольника ABC, проведенные из вершин B и C, продолжили до пересечения с описанной окружностью в точках B_1 и C_1. Оказалось, что отрезок B_1C_1 проходит через центр описанной окружности. Найдите угол BAC.

Ответ. 45^o

Решение.



Так как C_1B_1 *– диаметр, то* $\angle C_1BB_1 = 90^o$. *Так как* $BB_1 \perp AC$, *то* $C_1B \| AC$. *Поэтому* $BC_1C = C_1CA$. *Углы BC1C и BAC равны, как вписанные, опирающиеся на одну дугу. Следовательно,* $\angle C_1CA = \angle BAC$. *Пусть H –*

основание высоты, опущенной из вершины С. Прямоугольный треугольник АНС – равнобедренный, т.е. $\angle A=45^o$

6. Можно ли расставить числа 1, 2, 3, 4, …, 20 в вершинах и серединах рёбер куба так, чтобы число, стоящее в середине каждого ребра, равнялось полусумме чисел, стоящих на концах этого ребра?

Ответ. Нет.

Решение. Пусть искомая расстановка существует. Тогда числа, стоящие в соседних вершинах куба, должны быть одной четности, так как число, равное их полусумме, – целое. Отсюда следует, что все числа, стоящие в вершинах, одной четности. Но числа 1 и 20 не могут быть полусуммами никаких двух чисел от 1 до 20, поэтому числа разной четности 1 и 20 должны стоять в вершинах – противоречие.

Рекомендации по проверке.

Каждая задача оценивается из 7 баллов. Каждая оценка – целое число от 0 до 7. Ниже приведены некоторые указания к проверке. Естественно, всех случаев жюри предвидеть не может. При оценке решения нужно исходить из того, является ли приведенное решение в целом верным (хотя, может, и с недостатками) – тогда решение оценивается не менее чем в 4 балла. Или оно неверное (хотя, может, и с существенными продвижениями) – в этом случае оценка должна быть не выше 3 баллов.

Задача 1.
Правильный ответ без обоснования – 4 балла.
В качестве обоснования достаточно сказать, что кубики находятся на одинаковой высоте и найти «расстояние» между концами змейки по двум оставшимся измерениям.
Если «расстояния» по трем измерениям найдены правильно, но дальше при нахождении количества необходимых кубиков ошибка в один кубик – 4 балла.

Задача 2.
Ответ «да» без обоснования – 0 баллов.
Верно записано уравнение зависимости одной температуры от другой, а дальше продвижений нет – 2 балла.

Задача 3.
Неверно применяется теорема Виета (без деления на коэффициент при x^2*), а дальше все верно – 1 балл. Если теорема Виета неправильно применяется один раз в конце (в конце забыли умножить на 5) – 4 балла.*

Задача 4.
Ответ «0 рыцарей» без обоснования – 1 балл.
В предположении, что рыцари есть, найдена закономерность расположения рыцарей и лжецов, при этом не замечено, что данное расположение невозможно (не заметили проблему на стыке), откуда неправильно найдено общее число рыцарей – 2 балла. Предыдущее плюс найден случай 0 рыцарей – 3 балла.

Задача 5.
Только ответ без обоснования – 1 балл. Рассмотрение частных случаев обоснованием не является.

Задача 6.
Ответ «нет» без обоснования (с неверным обоснованием) – 0 баллов.